Mathematica sa fare le somme?

P. Codara[a], O. D' Antona[a], E. Munarini[b]

[a]Dipartimento di Informatica e Comunicazione, Università degli Studi di Milano
[b]Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano

Riassunto

Discutiamo due sommatorie doppie che, al momento, pare non possano essere calcolate con sistemi di calcolo simbolico.

Introduzione

La prima parte di questo lavoro riguarda questa identità:

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=1}^{i} \binom{n-1}{j-1} = 4^{n-1}$$

tratta da un lavoro di M. Hirschorn [Calkin' s binomial identity, Discrete Math. 159 (1996), pp. 273 –278]. È una semplice doppia sommatoria. Vediamo come funziona, in un caso specifico. Se pongo $n = 3$, abbiamo i corrispondenti binomiali

$$1,\ 2,\ 1 \quad \text{e} \quad 1,\ 3,\ 3,\ 1$$

e i tre addendi relativi:

$$3\,(1) + 3\,(1+2) + 1\,(1+2+1) = 3 + 9 + 4 = 16 = 4^2 .$$

Le prima, ovvia, ma importante considerazione che vogliamo fare a proposito della è che i coefficienti binomiali sono... simmetrici. La seconda è che:

$$4^{n-1} = 2^{2\,(n-1)} = 2^{n+(n-1)-1} = \frac{2^n\, 2^{n-1}}{2} .$$

Qui l'osservazione da fare è che il numeratore di questa frazione è il prodotto della somma dei coefficienti che compaiono nella prima sommatoria della $(*)$ moltiplicata per la somma dei coefficienti che compaiono nella seconda sommatoria.

Intanto vediamo il risultato dell'elaborazione di *Mathematica* nel caso dei binomiali:

$$\texttt{H[n\_] :=} \sum_{i=1}^{n} \texttt{Binomial}[n, i] \sum_{j=1}^{i} \texttt{Binomial}[n-1, j-1]$$

```
H[n]
```

$$\sum_{i=1}^{n} \texttt{Binomial}[n, i] \left(2^{-1+n} - \texttt{Binomial}[-1+n, i]\ \texttt{Hypergeometric2F1}[1+i-n, 1, 1+i, -1]\right)$$

Nei prossimi paragrafi illustriamo una generalizzazione della formula di Hirschorn.

Somme di successioni simmetriche

Sia $n = 2\,m + 1$ un intero maggiore di 2 e sia $A = a_0, a_1, \ldots, a_n$ una successione *simmetrica* di $n + 1$ numeri reali. In altre parole

$$a_i = a_{n-i} \quad \text{per} \quad i = 0, 1, \ldots, n .$$

Sia poi $B = b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ una successione simmetrica di n numeri reali. Ovvero

$$b_j = b_{n-1-j} \quad \text{per} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 .$$

Infine diciamo α la somma degli elementi di A e β quella degli elementi di B e definiamo come segue il simbolo $\sigma(A, B)$:

$$\sigma(A, B) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{i} b_{j-1} .$$

Sotto queste condizioni abbiamo il seguente TEOREMA.

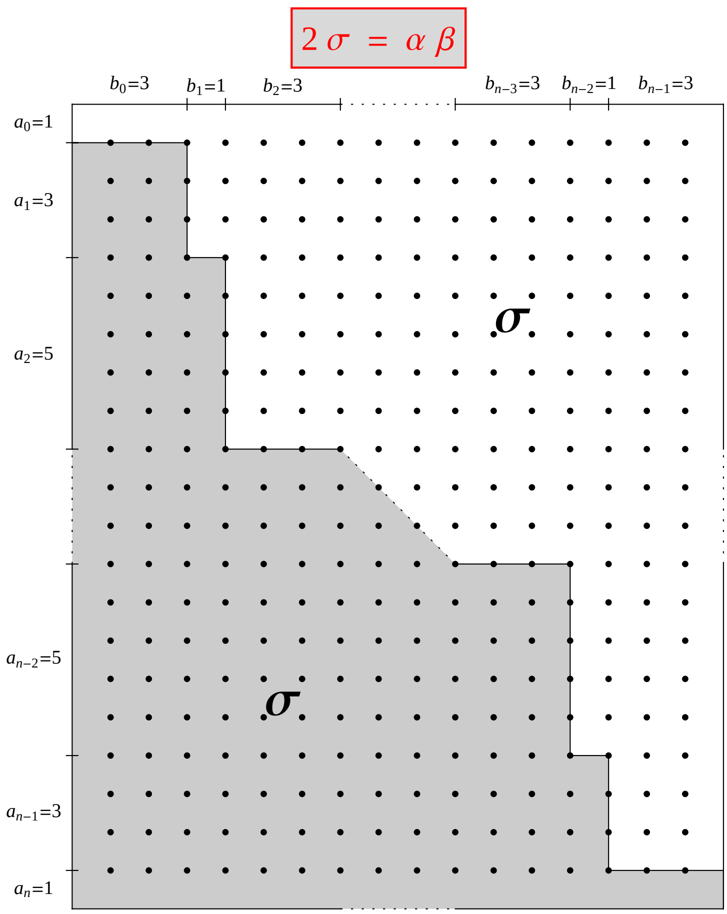
$$\sigma(A, B) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{i} b_{j-1} = \frac{\alpha\beta}{2} . \tag{1}$$

Un semplice esempio con $n = 4$. Prendiamo $B = 1, 3, 3, 1$ e $A = 1, 3, 5, 3, 1$, in modo da avere $\alpha = 8$ e $\beta = 13$. In questo caso avremo

$$\sigma(A, B) = 3\,(1) + 5\,(4) + 3\,(7) + 1\,(8) = 3 + 20 + 21 + 8 = 52 = \frac{8 \cdot 13}{2} .$$

Anche se di questo risultato esistono varie dimostrazioni, in questa sede ne mostreremo soltanto una: una dimostrazione che ha contemporaneamente un pregio e un limite. Infatti questa dimostrazione assume che gli elementi delle stringhe A e B non siano negativi, ma in compenso è molto semplice e intuitiva.

```
Show[Graphics[{
   RGBColor[.8, .8, .8], Polygon[{{0, 0}, {0, 20}, {3, 20}, {3, 17}, {4, 17}, {4, 12}, {7, 12},
     {10, 9}, {13, 9}, {13, 4}, {14, 4}, {14, 1}, {17, 1}, {17, 0}}], RGBColor[0, 0, 0],
   Table[Point[{x, y}], {x, 1, 16}, {y, 1, 20}], Text["a_0=1", {-1, 20.5}],
   Text["a_1=3", {-1, 18.5}], Text["a_2=5", {-1, 14.5}], Text["a_{n-2}=5", {-1, 6.5}],
   Text["a_{n-1}=3", {-1, 2.5}], Text["a_n=1", {-1, 0.5}], Text["b_0=3", {1.5, 21.5}],
   Text["b_1=1", {3.5, 21.5}], Text["b_2=3", {5.5, 21.5}], Text["b_{n-3}=3", {11.5, 21.5}],
   Text["b_{n-2}=1", {13.5, 21.5}], Text["b_{n-1}=3", {15.5, 21.5}], Line[{{0, 20}, {3, 20}}],
   Line[{{3, 20}, {3, 17}}], Line[{{3, 17}, {4, 17}}], Line[{{4, 17}, {4, 12}}],
   Line[{{4, 12}, {7, 12}}], Line[{{10, 9}, {13, 9}}], Line[{{13, 9}, {13, 4}}],
   Line[{{13, 4}, {14, 4}}], Line[{{14, 4}, {14, 1}}], Line[{{14, 1}, {17, 1}}],
   Line[{{17, 1}, {17, 0}}], Line[{{0, 0}, {0, 9}}], Line[{{0, 0}, {7, 0}}],
   Line[{{0, 12}, {0, 21}}], Line[{{10, 0}, {17, 0}}], Line[{{17, 0}, {17, 9}}],
   Line[{{0, 21}, {7, 21}}], Line[{{17, 12}, {17, 21}}], Line[{{10, 21}, {17, 21}}],
   Line[{{3, 21.15}, {3, 20.85}}], Line[{{4, 21.15}, {4, 20.85}}],
   Line[{{7, 21.15}, {7, 20.85}}], Line[{{10, 21.15}, {10, 20.85}}],
   Line[{{13, 21.15}, {13, 20.85}}], Line[{{14, 21.15}, {14, 20.85}}],
   Line[{{-0.15, 1}, {0.15, 1}}], Line[{{-0.15, 4}, {0.15, 4}}],
   Line[{{-0.15, 9}, {0.15, 9}}], Line[{{-0.15, 12}, {0.15, 12}}],
   Line[{{-0.15, 17}, {0.15, 17}}], Line[{{-0.15, 20}, {0.15, 20}}],
   {Dotted, Line[{{7, 12}, {10, 9}}], Line[{{0, 9}, {0, 12}}],
    Line[{{7, 0}, {10, 0}}], Line[{{17, 9}, {17, 12}}], Line[{{7, 21}, {10, 21}}]},
   Text[Style["σ", Large, Bold], {5.5, 5.5}], Text[Style["σ", Large, Bold], {11.5, 15.5}]},
  PlotRange → Automatic, Axes → False,
  PlotLabel → Style[Framed["2 σ  =  α β"], 16, Red, Background → LightGray]]]
```



L'area grigia è una somma di rettangoli ognuno dei quali corrispondende a un addendo della sommatoria doppia. Ad esempio, l'ultimo di questi rettangoli, di altezza a_n e base β, rappresenta l'ultimo addendo. Il primo invece, di altezza a_1 e base b_0, rappresenta il primo addendo. Per ragioni di simmetria l'area grigia ha la stessa forma e coincide con l'area bianca. La misura di entrambe queste aree è chiaramente σ e la loro somma non è altro che l'area del rettangolo: $\alpha\beta$.

Come sottoprodotto del ragionamento fatto per dimostrare la (1) abbiamo un'analoga affermazione:

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_j \sum_{i=0}^{j} a_i = \frac{\alpha\beta}{2} \;. \tag{2}$$

Ancora un commento prima di proseguire: il valore della nostra somma *non* dipende direttamente dalle successioni A e B. Infatti se indichiamo con A' una qualunque successione ottenuta da A tramite una permutazione dei suoi elementi che ne preservi la simmetria, avremo ancora

$$\sigma(A', B) = \frac{\alpha\beta}{2} = \sigma(A, B) \,.$$

Infatti, come tutti sanno... *cambiando l'ordine degli addendi, la somma non cambia*. Per descrivere in termini generali questa circostanza, diremo che le coppie (A, B) e (C, D) sono *equivalenti secondo Hirschorn* se

$$\sigma(A, B) = \sigma(C, D) \,.$$

Per un semplicissimo esempio prendiamo le due successioni di coefficienti binomiali

$$(B) \quad 1, 2, 1 \qquad \text{e} \qquad (A) \quad 3, 1, 1, 3$$

e i tre addendi relativi:

$$1\,(1) + 1\,(1 + 2) + 3\,(1 + 2 + 1) = 1 + 3 + 12 = 16 = 4^2 \,.$$

Ma attenzione: questo tipo di equivalenza va ben oltre le permutazioni. Vediamo un esempio con

$$(B) \quad 1, 3, 3, 1 \qquad \text{e} \qquad (A) \quad 16/5, 16/5, 16/5, 16/5, 16/5$$

Qui $n = 4$, $\beta = 8$ e $\alpha = 16$. Ebbene anche in questo caso avremo

$$\sigma(A, B) = \frac{16}{5} \cdot 1 + \frac{16}{5} \cdot 4 + \frac{16}{5} \cdot 7 + \frac{16}{5} \cdot 8 = \frac{16}{5} \cdot 20 = 64 \,.$$

E chiudiamo il paragrafo con un caso particolare:

$$(B) \quad 1, 3, 3, 1 \qquad \text{e} \qquad (A) \quad 16, 0, 0, 0, 16 \,.$$

$$(B') \quad 3, 1, 1, 3 \qquad \text{e} \qquad (A') \quad \pi\,, 0, 0, 0, 16 \,.$$

Strano, ma vero. Queste due coppie sono equivalenti secondo Hirschorn. Ovvero

$$\sigma(A, B) = \sigma(A', B') = 64 \,,$$

anche se $\alpha' = \pi + 16$. Si noti comunque che questo risultato non scalfisce la validità del nostro teorema in quanto la stringa A' non è simmetrica.

L'appetito vien mangiando, ma ...

Visto che abbiamo una simpatica formuletta che ci consente di calcolare agevolmente una doppia sommatoria, perché non cercarne una per le sommatorie triple? Date tre successioni simmetriche, A, B e C, tale formula dovrebbe avere il seguente aspetto

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \sum_{j=2}^{i} b_{j-1} \sum_{k=2}^{j} c_{k-2} = \frac{\alpha\beta\gamma}{3!}$$

dove γ è la somma degli elementi di C. Vediamo il più semplice dei casi, quello delle successioni costanti. Ponendo ad esempio $n = 3$ e

$$(C)\quad c,\ c \qquad (B)\quad b,\ b,\ b \qquad (A)\quad a,\ a,\ a,\ a\ ,$$

la nuova formula dice

$$a_2\, b_1\, c_0 + a_3(b_1\, c_0 + b_2(c_0 + c_1)) = a\, b\, c + a(b\, c + b\, 2\, c) = 4\, abc\ .$$

Ed in effetti

$$\frac{2\, c \cdot 3\, b \cdot 4\, a}{6} = 4\, abc\ ,$$

Purtroppo però, in generale questa formula non vale! Ad esempio, nel caso dei fattoriali il prodotto $\alpha\beta\gamma$ è una potenza di 2 che quindi non ha 3 tra i suoi divisori (mentre invece la somma in questione restituisce un intero).

Oltre la simmetria

Da quanto detto risulta evidente il ruolo centrale giocato dalla simmetria delle successioni in questione. Tuttavia, come vedremo ora, anche rinunciando alla simmetria delle successioni si possono ottenere dei risultati interessanti.

Introduciamo due nuove successioni costruite in termini delle A e B:

$$A' = Ha_0,\ H\, a_1,\ \ldots,\ H\, a_m,\ K\, a_{m+1},\ K\, a_{m+2},\ \ldots,\ K\, a_n\ ,$$

$$B' = Kb_0,\ K\, b_1,\ \ldots,\ K\, b_{m-1},\ T\, b_m,\ H\, b_{m+1},\ H\, b_{m+2},\ \ldots,\ H\, b_{n-1}\ ,$$

in cui H, K e T sono valori arbitrari, ma con $H \neq -K$ e $T \neq 0$. Nel seguito, indicheremo rispettivamente con a_i' e b_j' gli elementi delle successioni A', and B'. Analogamente, scriveremo α' e β' per indicare la somma degli elementi di A' e B' . È facile vedere che

$$\alpha' = (H + K)\,\frac{\alpha}{2} \qquad \text{e} \qquad \beta' = (H + K)\,\frac{\beta - b_m}{2} + T\, b_m\ .$$

È del tutto evidente che, in generale, le nuove successioni non hanno alcuna forma di simmetria. La cosa ci impedirà di fornire semplici dimostrazioni dei nostri risultati. Ecco il primo:

$$\sigma' = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{i} b_{j-1} = \frac{K\,\alpha'\,\beta'}{H + K} \qquad (3)$$

Una formula che rivela una forte analogia con i risultati precedenti. Tra l'altro è immediato osservare che ponendo $H = K = 1$ si ritrova la (1) . Anche se meno compatta, è pur sempre interessante registrare l'espressione di σ' in funzione delle successioni A e B:

$$\sigma' = \frac{K\,\alpha\,[(K + H)\,\beta + (2\,T - H - K)\,b_m]}{4}\ . \qquad (4)$$

Come detto le dimostrazioni di queste eguaglianze sono poco eleganti e, quindi, rinunciamo ad esaminarle.

Vale però la pena di concludere con l'analisi di alcuni casi particolari che nascono dalla scelta di opportuni valori dei parametri H, K e T. Se, ad esempio, poniamo $2\,T = H + K$, si vede facilmente che

$$4\,\sigma' = K\alpha 2T\beta \qquad \text{ovvero} \qquad \sigma' = KT\sigma.$$

Si tratta di una relazione piuttosto curiosa perché ci dice che, se H e T sono l'uno l'inverso dell'altro, allora $\sigma' = \sigma$. Facciamo un esempio. Poniamo $n = 5$ e lavoriamo con i binomiali. Dunque avremo $\sigma = 4^{n-1} = 256$. Poi, ponendo $K = 2$, $T = 1/2$ e di conseguenza $H = -1$, avremo

$$A' = -1,\ -5,\ -10,\ 20,\ 10,\ 2 \qquad \text{e} \qquad B = 2,\ 8,\ 3,\ -4,\ -1\ .$$

E, non ostante la totale assenza di simmetria, abbiamo

$$\sigma' = -5\cdot 2 - 10\cdot 10 + 20\cdot 13 + 10\cdot 9 + 2\cdot 8 = 256\,.$$

Un'altra somma

Per descrivere il secondo caso di doppia sommatoria apparentemente non risolubile dagli attuali sistemi di calcolo simbolico, è utile descrivere un particolare insieme parzialmente ordinato che chiameremo $V_{n,m}$. Si tratta di un albero formato da due catene, l'una con n lati e l'altra con m, unite alla loro radice. Nel corso delle nostre ricerche ci siamo interessati al numero, $OP_{n,m}$, di certe particolari partizioni dell'insieme supporto di $V_{n,m}$, insieme che è costituito da $n + m + 1$ punti.

Il risultato che abbiamo ottenuto è la seguente formula:

$$(**) \qquad OP_{n,m} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} P(n - i + 1)\, P(m - j + 1) \binom{i + j - 2}{i - 1},$$

dove $P(t) = 2^{t-1}$ se $t \neq 0$, mentre invece $P(0) = 1$. Per evitare l'uso della funzione $P(t)$ possiamo riscrivere l'espressione $OP_{n,m}$ come somma di quattro termini più semplici:

$$\mathbf{OP[n\_,\ m\_] := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} 2^{n-i}\, 2^{m-j}\ Binomial[i + j - 2,\ i - 1]\ +}$$
$$\mathbf{\sum_{i=1}^{n} 2^{n-i}\ Binomial[i + m - 1,\ i - 1]\ +\ \sum_{j=1}^{m} 2^{m-j}\ Binomial[n + j - 1,\ j - 1]\ +\ Binomial[n + m,\ n]}$$

Ma anche per questa formula non abbiamo trovato né un'espressione chiusa né altre espressioni significative ad essa equivalenti:

```
OP[n, m]
```

$$2^{1+m+n} + \mathrm{Binomial}[m + n,\ n] - \mathrm{Binomial}[m + n,\ n]\ \mathrm{Hypergeometric2F1}[-m,\ 1,\ 1 + n,\ -1] -$$
$$\mathrm{Binomial}[m + n,\ m]\ \mathrm{Hypergeometric2F1}[-n,\ 1,\ 1 + m,\ -1] +$$
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} 2^{-i-j+m+n}\ \mathrm{Binomial}[-2 + i + j,\ -1 + i]$$

Tuttavia, anche se soltanto in un caso particolare, siamo riusciti ad aggirare parzialmente l'ostacolo. Consideriamo la tabella in cui abbiamo raccolto alcuni valori di $OP_{n,m}$

```
TableForm[Table[OP[n, m], {n, 0, 10}, {m, 0, 10}],
 TableHeadings → {{"n=0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10"},
   {"m=0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10"}}]
```

	m=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n=0	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
1	2	5	11	23	47	95	191	383	767	1535	3071
2	4	11	26	57	120	247	502	1013	2036	4083	8178
3	8	23	57	130	282	593	1223	2492	5040	10 147	20 373
4	16	47	120	282	628	1349	2828	5832	11 896	24 091	48 560
5	32	95	247	593	1349	2954	6294	13 150	27 094	55 281	112 033
6	64	191	502	1223	2828	6294	13 612	28 810	60 000	123 473	251 890
7	128	383	1013	2492	5832	13 150	28 810	61 716	129 908	269 765	554 423
8	256	767	2036	5040	11 896	27 094	60 000	129 908	276 200	578 733	1 198 692
9	512	1535	4083	10 147	24 091	55 281	123 473	269 765	578 733	1 223 002	2 552 766
10	1024	3071	8178	20 373	48 560	112 033	251 890	554 423	1 198 692	2 552 766	5 367 676

e isoliamone la diagonale principale:

```
Table[OP[n, n], {n, 0, 20}]
```

```
{1, 5, 26, 130, 628, 2954, 13 612, 61 716, 276 200, 1 223 002, 5 367 676,
 23 383 100, 101 215 576, 435 712 580, 1 866 667 448, 7 963 424 104, 33 846 062 544,
 143 373 104 378, 605 518 549 660, 2 550 438 016 812, 10 716 162 617 336}
```

Questi valori coincidono con i primi valori della successione A003583 della *On-line Encyclopedia of Integer Sequences* gestita da N.J.A. Sloane. Ebbene, alla URL http://www.research.att.com/~njas/sequences/ si vede che la successione A003583 viene generata dalla formula

$$(n+1)\,2^{2n-3} - \frac{n-1}{2}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Dunque tale espressione si candida ad essere la forma chiusa di $OP_{n,n}$.