

ENUMERAZIONE DI MORFISMI TRA CLASSI DI MV INSIEMI.

1

P. CODARA

SOMMARIO. Si svolge il conteggio di morfismi arbitrari, iniettivi e suriettivi tra alcuni particolari MV set (dipendenti da due parametri r ed n) utilizzando il pacchetto *mvset* e nuove funzioni *Mathematica* sviluppate appositamente. Segue una discussione sui risultati ottenuti.

ABSTRACT. We do the counting of arbitrary, injective and surjective morphisms between some particular MV sets (which depend on two parameters r and n). In order to do so we use the package *mvset* and new *Mathematica* functions, which have been appropriately developed. A discussion on the results follows.

INDICE

1. Definizione degli MV set α_r^n	2
2. Funzioni <i>Mathematica</i> per i conteggi	6
3. MV funzioni arbitrarie	11
3.1. Note	18
4. MV iniezioni	19
5. MV suriezioni	20
Appendice A. Tabelle dei risultati	24
Riferimenti bibliografici	27

1. DEFINIZIONE DEGLI MV SET α_r^n

Consideriamo gli MV set¹ i cui elementi hanno molteplicità date da tutti i possibili prodotti tra n fattori primi, non necessariamente distinti, presi da un sottoinsieme di r numeri primi. Per comodità verranno qui considerati i primi r elementi p_1, p_2, \dots, p_r di $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$. In maniera analoga possiamo indicare con $\mathbb{P}_r = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ il sottoinsieme di \mathbb{P} contenente i suoi r elementi più piccoli $p_1 < p_2 < \dots < p_r$. Consideriamo l'insieme M_r^n composto da tutti i prodotti $p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_r^{m_r}$ tali che $m_1, m_2, \dots, m_r \geq 0$, $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$, e costruiamo un MV set i cui elementi abbiamo come molteplicità gli elementi di M_r^n . Indicheremo questo MV set con lettere greche minuscole indiciate da r ed n (ad esempio: α_r^n).

Facciamo un esempio. Consideriamo $r = 3$ e sia $n = 2$.

L'insieme nel quale "pescare" i fattori sarà $\mathbb{P}_3 = \{2, 3, 5\}$. Le molteplicità degli elementi saranno date dai prodotti:

$$2 \cdot 2 = 2^2 = 4 ; 2 \cdot 3 = 6 ; 3 \cdot 3 = 3^2 = 9 ; 3 \cdot 5 = 15 ; 5 \cdot 5 = 5^2 = 25 .$$

Si ha quindi: $\alpha_3^2 = \{a_1^4, a_2^6, a_3^9, a_4^{15}, a_5^{25}\}$.

La cardinalità di questi insiemi, intesa in senso classico, ovvero come cardinalità degli insiemi supporto, è data dal numero di tutti i possibili prodotti tra i fattori primi considerati. Dato un MV set α_r^n , la sua cardinalità sarà quindi pari alla cardinalità dell'insieme M_r^n delle molteplicità. Si ha allora:

$$|\alpha_r^n| = |M_r^n| = \left| \left\{ p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_r^{m_r} : m_1, m_2, \dots, m_r \geq 0; \sum_i m_i = n \right\} \right| ,$$

$$|\alpha_r^n| = \binom{r+n-1}{n} = \frac{\langle r \rangle_n}{n!} .$$

Vogliamo, in queste pagine, affrontare il problema del conteggio di MV funzioni tra MV set di questo tipo. In ambiente *Mathematica* andremo a scrivere alcune funzioni che, sfruttando il pacchetto *mvset* sviluppato in [Cod04], ci permetteranno di ricavare il numero di morfismi al variare dei parametri r ed n . Studieremo quindi i risultati ottenuti. Verranno considerati solo MV set non vuoti, dobbiamo quindi imporre $r > 0$. Per quanto riguarda il parametro n , questo potrebbe anche essere pari a 0: in questo caso l'unico prodotto possibile tra r primi sarà $p_1^0 \cdot p_2^0 \cdot \dots \cdot p_r^0 = 1$, quindi $\alpha_r^0 = \{a_1^1\}$, $\forall r > 0$.

Consideriamo le MV funzioni generiche da un MV set α_r^n in un MV set β_s^m . Indichiamo con $\#\{f : \alpha_r^n \rightarrow \beta_s^m\}$ il numero di tali funzioni. Nel caso particolare in

¹Per i concetti di base sugli MV set si rimanda a [DM] e [Cod04].

cui $n = m = 0$ si ha, per quanto appena detto, che:

$$\#\{f : \alpha_r^0 \rightarrow \beta_s^0\} = \#\{f : \{a_1^1\} \rightarrow \{b_1^1\}\} = 1 \quad , \quad \forall r, s > 0.$$

In realtà il numero di MV funzioni tra i due MV set è uguale a 1 in ogni caso in cui $m = 0$, perché l'unica funzione possibile è quella che mappa tutti gli elementi di α_r^n nell'unico elemento b_1^1 di β_s^0 . Poniamo allora $m > 0$, e cerchiamo di fare alcune osservazioni sull'influenza dei parametri r ed s nel conteggio.

Caso $r > s$. Per come questi MV set sono stati definiti, esiste in α_r^n un elemento a_i avente molteplicità p_r^n . Le molteplicità degli elementi del codominio β_s^m saranno invece generate da prodotti tra i primi $p_1 < p_2 < \dots < p_s$, con $p_s < p_r$, perché $s < r$. Si osserva inoltre che, essendo $m > 0$, le molteplicità degli elementi di β_s^m saranno sicuramente maggiori di 1, in quanto ottenute come prodotti di m numeri primi. Risulta immediatamente che p_r^n non è divisibile per nessuna molteplicità degli elementi del codominio, dato che i suoi unici divisori sono $p_r^0, p_r^1, \dots, p_r^n$. Non esiste quindi nessuna MV funzione che possa mappare l'elemento a_i in un elemento di β_s^m . In altre parole:

se $r > s$ e $m > 0$ non esistono MV funzioni da α_r^n a β_s^m .

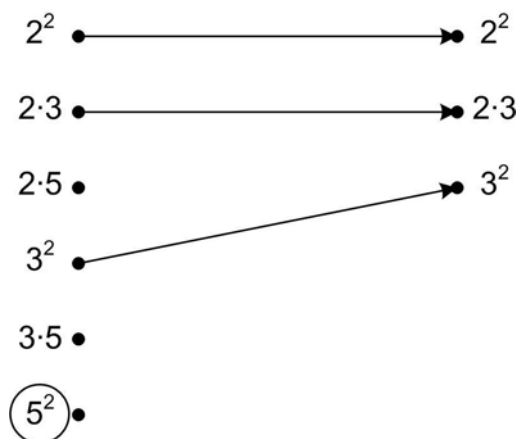


FIGURA 1. Non vi sono MV funzioni da α_3^2 a β_2^2 .

Caso $r < s$. In questo caso va osservato che le molteplicità degli elementi di β_s^m sono ottenute come prodotti tra i primi $p_1, p_2, \dots, p_r, p_{r+1}, \dots, p_s$, mentre le molteplicità degli elementi di α_r^n sono ottenute come prodotti tra i primi p_1, p_2, \dots, p_r . Tutte le molteplicità di β_s^m che hanno tra i fattori un numero primo maggiore di p_r non divideranno nessuna molteplicità di α_r^n : nessuna MV funzione mapperà quindi elementi di α_r^n in elementi di β_s^m aventi queste molteplicità. Le uniche MV funzioni possibili da α_r^n a β_s^m coinvolgeranno solo elementi di β_s^m aventi

molteplicità ottenute da prodotti di numeri primi contenuti in $\mathbb{P}_r = \{p_1, \dots, p_r\}$: questo sottoinsieme di elementi di β_s^m è isomorfo a un MV set β_r^m . In conclusione:

$$\text{se } r < s \text{ allora } \#\{f : \alpha_r^n \rightarrow \beta_s^m\} = \#\{f : \alpha_r^n \rightarrow \beta_r^m\}.$$

Abbiamo quindi verificato che l'unico caso significativo di conteggio di MV morfismi tra i due MV set α_r^n e β_s^m si ha per $r = s$.

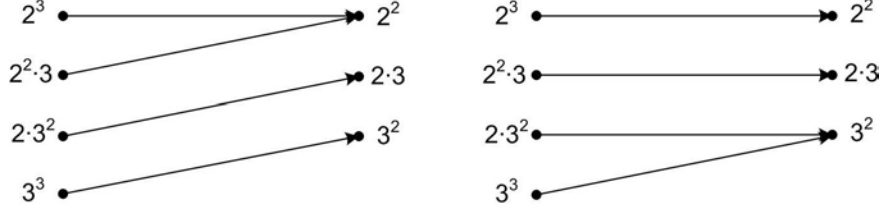


FIGURA 2. Due MV funzioni da α_2^3 a α_2^2 .

Possiamo ora ricavare alcune considerazioni sui parametri n e m . Consideriamo i due MV set α_r^n e β_r^m .

Notazione. Indicheremo, da qui in avanti, il numero di MV funzioni da α_r^n a β_r^m con il simbolo $\mathcal{F}_{n,m}^r$:

$$\mathcal{F}_{n,m}^r = \#\{f : \alpha_r^n \rightarrow \beta_r^m\}.$$

Caso $n < m$. Osserviamo che le molteplicità degli elementi di α_r^n e β_r^m sono ottenibili, rispettivamente, come prodotti di n ed m fattori primi. Considerando un qualsiasi elemento di α_r^n , risulta immediato che la sua molteplicità non è divisibile per nessuna molteplicità di β_r^m , perchè nessun numero ottenuto come prodotto di n numeri primi è divisibile per un numero scomponibile in più di n fattori primi. Vale quindi:

$$\text{se } n < m \text{ allora } \mathcal{F}_{n,m}^r = 0.$$

Caso $n = m$. In questo caso, per le definizioni date, gli MV set α_r^n e β_r^m sono isomorfi. Consideriamo un qualsiasi elemento a_i di α_r^n e sia t la sua molteplicità. Ricordando che le molteplicità degli elementi di α_r^n e β_r^m sono ottenute come prodotto di $n = m$ fattori primi appartenenti allo stesso insieme \mathbb{P}_r , si deduce che l'unico divisore di t tra le molteplicità degli elementi di β_r^m è t stesso. Ogni elemento di α_r^n potrà quindi essere mappato nell'unico elemento di β_r^m avente la sua stessa molteplicità. Questo elemento esiste sicuramente, perché i due MV set sono isomorfi. Si ha dunque:

$$\text{se } n = m \text{ allora } \mathcal{F}_{n,m}^r = 1.$$

Restano ancora da contare le MV funzioni da un MV set α_r^n in un MV set β_r^m , al variare di n ed m , con $n > m > 0$. Per farlo, faremo ricorso all'utilizzo di *Mathematica*.

2. FUNZIONI *Mathematica* PER I CONTEGGI

Verranno conteggiate, con l'ausilio di *Mathematica*, le MV funzioni generiche, le MV iniezioni e le MV suriezioni tra MV set del tipo α_r^n . Le principali funzioni sviluppate a tal fine sono:

- `MVPrimeSet[r,n]` : costruisce un MV set α_r^n .
- `MVPrimeSetFunctions[r,nmax]` : genera la tabella dei numeri di MV funzioni generiche tra tutte le possibili coppie di MV set α_r^n al variare di n tra 0 e nmax.
- `MVPrimeSetWeakInjFunctions[r,nmax]` : genera la tabella dei numeri di MV iniezioni deboli tra tutte le possibili coppie di MV set α_r^n al variare di n tra 0 e nmax.
- `MVPrimeSetStrongInjFunctions[r,nmax]` : genera la tabella dei numeri di MV iniezioni forti tra tutte le possibili coppie di MV set α_r^n al variare di n tra 0 e nmax.
- `MVPrimeSetWeakSurFunctions[r,nmax]` : genera la tabella dei numeri di MV suriezioni deboli tra tutte le possibili coppie di MV set α_r^n al variare di n tra 0 e nmax.
- `MVPrimeSetStrongSurFunctions[r,nmax]` : genera la tabella dei numeri di MV suriezioni forti tra tutte le possibili coppie di MV set α_r^n al variare di n tra 0 e nmax.

L'output delle funzioni di conteggio è una tabella quadrata avente in posizione (i, j) il numero di MV funzioni (generiche, iniettive o suriettive a seconda della funzione utilizzata) da α_r^i in β_r^j . Righe e colonne della tabella saranno contate a partire dal numero 0. Nel caso delle funzioni generiche il risultato sarà una tabella di questo tipo:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_{0,0}^r & \mathcal{F}_{0,1}^r & \mathcal{F}_{0,2}^r & \cdots & \mathcal{F}_{0,nmax}^r \\ \mathcal{F}_{1,0}^r & \mathcal{F}_{1,1}^r & \mathcal{F}_{1,2}^r & \cdots & \mathcal{F}_{1,nmax}^r \\ \mathcal{F}_{2,0}^r & \mathcal{F}_{2,1}^r & \mathcal{F}_{2,2}^r & \cdots & \mathcal{F}_{2,nmax}^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{F}_{nmax,0}^r & \mathcal{F}_{nmax,1}^r & \mathcal{F}_{nmax,2}^r & \cdots & \mathcal{F}_{nmax,nmax}^r \end{pmatrix}.$$

In input alle funzioni sono forniti il valore di r ed il parametro $nmax$ rappresentante il valore massimo che i ed j dovranno assumere. La tabella restituita avrà quindi dimensione $(nmax + 1) \cdot (nmax + 1)$.

Andiamo ad esporre alcuni dei risultati ottenuti, così come ci sono restituiti dal motore di calcolo di *Mathematica*². Ricordando che un MV set verrà rappresentato

²L'analisi di questi risultati sarà argomento dei successivi paragrafi.

mediante una lista di molteplicità dei suoi elementi, iniziamo a generare alcuni MV set di tipo α_r^n :

MVPrimeSet [10,0]
 {1}

MVPrimeSet [10,1]
 {29,23,19,17,13,11,7,5,3,2}

MVPrimeSet [2,4]
 {81,54,36,24,16}

MVPrimeSet [2,5]
 {243,162,108,72,48,32}

MVPrimeSet [3,3]
 {125,75,45,27,50,30,18,20,12,8}

Procediamo con il calcolo del numero di MV funzioni generiche. Osserviamo che per $r = 1$ le molteplicità degli elementi sono le potenze dell'unico primo presente nell'insieme nell'insieme $\mathbb{P}_1 = \{2\}$. Il conteggio delle funzioni da α_1^i a β_1^j , al variare di i e j tra 0 e 5, è:

MVPrimeSetFunctions [1,5]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Contiamo ora le MV funzioni da α_2^i a β_2^j . In questo caso le molteplicità degli elementi dei due insiemi saranno date da prodotti di primi appartenenti all'insieme $\mathbb{P}_2 = \{2, 3\}$. La tabella dei risultati è la seguente:

MVPrimeSetFunctions[2,10]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 12 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 16 & 36 & 36 & 16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 32 & 108 & 144 & 108 & 32 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 64 & 324 & 576 & 576 & 324 & 64 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 128 & 972 & 2304 & 2880 & 2304 & 972 & 128 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 256 & 2916 & 9216 & 14400 & 14400 & 9216 & 2916 & 256 & 1 & 0 \\ 1 & 512 & 8748 & 36864 & 72000 & 86400 & 72000 & 36864 & 8748 & 512 & 1 \end{pmatrix}$$

Per $r = 3$, $r = 4$ ed $r = 5$ i risultati ottenuti sono ³:

MVPrimeSetFunctions[3,5]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 192 & 192 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 13824 & 110592 & 13824 & 1 & 0 \\ 1 & 2985984 & 373248000 & 373248000 & 2985984 & 1 \end{pmatrix}$$

MVPrimeSetFunctions[4,4]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 64 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 331776 & 331776 & 1 & 0 \\ 1 & 557256278016 & 300578991243264 & 557256278016 & 1 \end{pmatrix}$$

MVPrimeSetFunctions[5,3]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1024 & 1 & 0 \\ 1 & 61917364224 & 61917364224 & 1 \end{pmatrix}$$

Passiamo infine al conteggio delle MV iniezioni. . .

³Le dimensioni della pagina ci consentono di visualizzare solo tabelle piuttosto piccole. Per risultati più completi si rimanda all'appendice A.

MVPrimeSetWeakInjFunctions[1,5]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MVPrimeSetWeakInjFunctions[2,5]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

... quindi al conteggio delle suriezioni deboli ⁴...

MVPrimeSetWeakSurFunctions[1,5]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MVPrimeSetWeakSurFunctions[2,7]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 10 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 16 & 32 & 21 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 32 & 100 & 98 & 40 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 64 & 308 & 436 & 263 & 72 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

... e delle suriezioni forti:

⁴La dimensione ridotta dei risultati è, in questo caso e nei successivi, dovuta a problemi di computazione.

MVPrimeSetStrongSurFunctions[1,5]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MVPrimeSetStrongSurFunctions[2,7]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 16 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. MV FUNZIONI ARBITRARIE

Analizziamo il caso del conteggio delle funzioni generiche, iniziando da alcune osservazioni sulla tabella `MVPrimeSetFunctions [2, n]`⁵.

Si osserva, come già detto nel paragrafo 1, che il numero di MV funzioni da α_2^n a β_2^m è nullo se $n < m$ ed è uguale ad 1 quando $n = m$ oppure $m = 0$. Un'altra considerazione, immediata conseguenza dell'osservazione della matrice dei risultati, riguarda la simmetria delle righe, se considerate solo nella loro parte significativa (per $n \leq m$). Questa osservazione può essere sintetizzata dalla seguente espressione:

$$\mathcal{F}_{n,m}^2 = \mathcal{F}_{n,n-m}^2$$

La medesima osservazione resta valida nelle matrici ottenute ponendo $r = 3$, $r = 4$ ed $r = 5$. Prima di arrivare ad affermare che questo vale per ogni $r > 0$, introduciamo il seguente:

Lemma 3.1 (Esistenza di MV funzioni). *Siano $r > 0$ e $n \geq m \geq 0$. Allora esiste $f : \alpha_r^n \rightarrow \beta_r^m$ tale che f è una MV funzione.*

Dimostrazione. Sia $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_r^{x_r}$, con $x_i \geq 0 \forall i$, la molteplicità di un qualsiasi elemento di α_r^n . Sappiamo che $\sum_{i=1}^r x_i = n$. Essendo $n \geq m$, esistono $y_1, y_2, \dots, y_r \geq 0$ tali che $y_1 \leq x_1, y_2 \leq x_2, \dots, y_r \leq x_r$ e $\sum_{i=1}^r y_i = m$. Il numero $p_1^{y_1} p_2^{y_2} \cdots p_r^{y_r}$ dividerà $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_r^{x_r}$. Questo numero è molteplicità di un elemento di β_r^m . Preso dunque un qualsiasi elemento $a^t \in \alpha_r^n$ esiste un elemento di β_r^m avente molteplicità che divide t . Esiste quindi un modo di mappare attraverso una MV funzione ogni elemento di α_r^n in un elemento di β_r^m . \square

Siamo ora in grado di dimostrare che vale:

Teorema 3.2 (Simmetria).

$$\mathcal{F}_{n,m}^r = \mathcal{F}_{n,n-m}^r, \quad \forall r > 0, n \geq m \geq 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo i tre MV set α_r^n , β_r^m e γ_r^k , con $k = n - m$. Siano M_α , M_β e M_γ gli insiemi delle molteplicità degli elementi di questi MV set. Sia poi $\mathbb{P}_r = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ l'insieme dei primi r elementi di \mathbb{P} . Allora, per le definizioni date nel paragrafo 1:

$$\begin{aligned} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_r^{x_r} \in M_\alpha &\iff \sum_{i=1}^r x_i = n, x_i \geq 0; \\ p_1^{y_1} p_2^{y_2} \cdots p_r^{y_r} \in M_\beta &\iff \sum_{i=1}^r y_i = m, y_i \geq 0; \\ p_1^{z_1} p_2^{z_2} \cdots p_r^{z_r} \in M_\gamma &\iff \sum_{i=1}^r z_i = k, z_i \geq 0. \end{aligned}$$

⁵Per le tabelle dei risultati, si faccia riferimento al paragrafo 2 e all'appendice A

Consideriamo ora una qualsiasi MV funzione da α_r^n a β_r^m , sia f questa funzione. Per il lemma 3.1 una funzione di questo tipo esiste sicuramente. f mapperà ogni elemento di α_r^n in un elemento di β_r^m . Preso un qualsiasi elemento $a^t \in \alpha_r^n$, vale che: $a^t \xrightarrow{f} b_j^q \in \beta_r^m \implies q \text{ div } t$. Posti quindi $t = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_r^{x_r}$ e $q = p_1^{y_1} p_2^{y_2} \cdots p_r^{y_r}$ si ha:

$$\frac{t}{q} = \frac{p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_r^{x_r}}{p_1^{y_1} p_2^{y_2} \cdots p_r^{y_r}} = p_1^{z_1} p_2^{z_2} \cdots p_r^{z_r},$$

con $z_i = x_i - y_i \geq 0$, per ogni i , perché $q \text{ div } t$. Vale allora:

$$\sum_{i=1}^r z_i = \sum_{i=1}^r (x_i - y_i) = n - m = k.$$

Dunque $p_1^{z_1} p_2^{z_2} \cdots p_r^{z_r}$ appartiene all'insieme M_γ delle molteplicità degli elementi di γ_r^k . In altre parole, avendo scelto un elemento qualsiasi di α_r^n , abbiamo dimostrato che data una MV funzione $f : \alpha_r^n \rightarrow \beta_r^m$ e per ogni $a^t \in \alpha_r^n$, se $a^t \xrightarrow{f} b_i^q \in \beta_r^m$, allora esiste $c_j^v \in \gamma_r^k$ tale che $v = \frac{t}{q}$. Ovviamente questo elemento è unico, perché esiste in γ_r^k un unico elemento avente molteplicità v . v dividerà sicuramente t , perché ottenuto come rapporto $\frac{t}{q}$. Per ogni MV funzione f da α_r^n a β_r^m è dunque possibile costruire, in un unico modo, una MV funzione g da α_r^n a γ_r^{n-m} . Questa funzione mapperà ogni elemento $a^t \in \alpha_r^n$, tale che $a^t \xrightarrow{f} b_i^q \in \beta_r^m$, nell'elemento $c_j^v \in \gamma_r^k$ avente molteplicità $v = \frac{t}{q}$. In modo del tutto analogo, per ognuna delle MV funzioni f da α_r^n a β_r^m è possibile costruire univocamente una MV funzione da α_r^n a β_r^m . In definitiva, il numero delle MV funzioni da α_r^n a β_r^m è pari al numero delle MV funzioni da α_r^n a γ_r^{m-n} \square

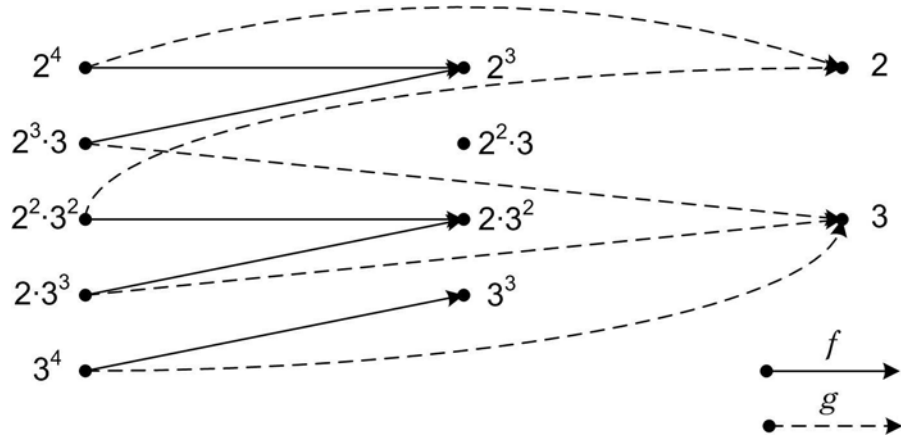


FIGURA 3. Costruzione di $g : \alpha_2^4 \rightarrow \beta_2^3$, a partire da $f : \alpha_2^4 \rightarrow \beta_2^3$.

Proviamo a dare un'interpretazione geometrica alle MV funzioni. Consideriamo un MV set α_r^n . Preso un suo generico elemento a_i^t , con $t = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_r^{x_r}$, diciamo

che questo elemento avrà come corrispondente il punto di uno spazio r -dimensionale avente coordinate (x_1, x_2, \dots, x_r) . Abbiamo così stabilito una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di α_r^n e i punti a coordinate intere non negative dell'iperpiano $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$. Questa corrispondenza risulta più chiara osservando le figure 4 e 5.

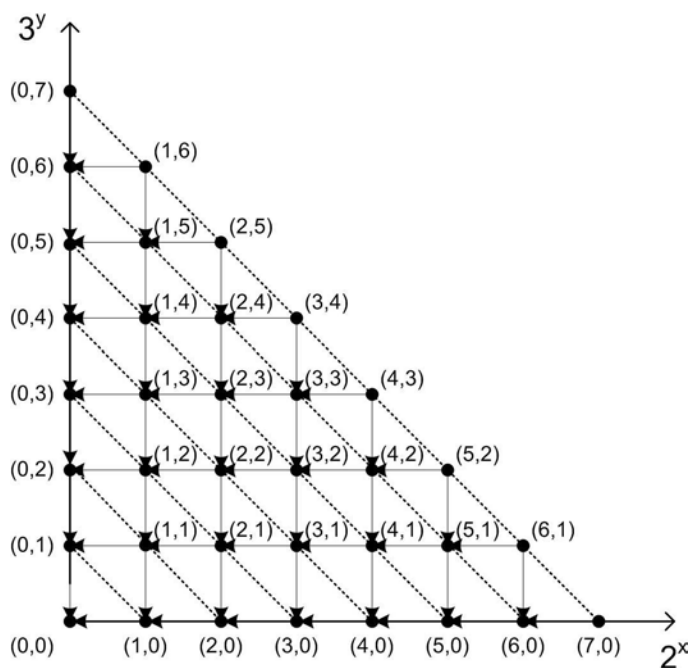


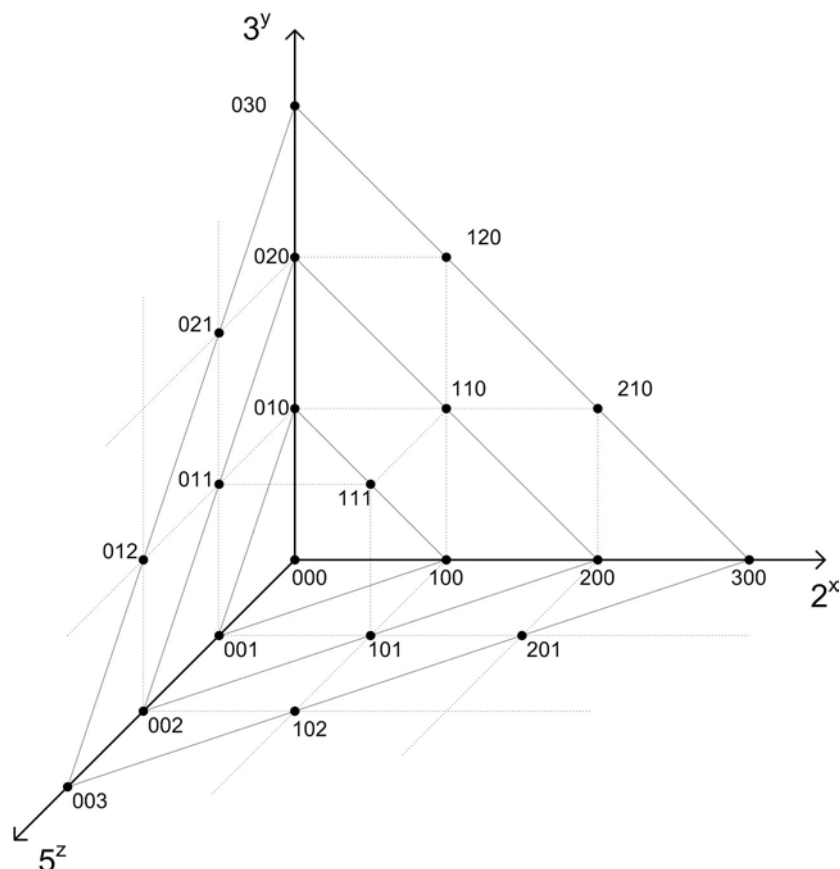
FIGURA 4. $r = 2$.

A questo punto, ad una MV funzione da α_r^n a β_r^m facciamo corrispondere una funzione dall'insieme $S_r^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_r) \mid x_i \in \mathbb{N}, \forall i ; x_1 + x_2 + \dots + x_r = n \}$ all'insieme S_r^m , analogamente definito. Preso un qualsiasi punto dell'iperpiano S_r^n , le coordinate del suo corrispondente attraverso questa funzione saranno, ad una ad una, minori o uguali alle coordinate del punto considerato. Questa funzione mapperà cioè ogni punto di S_r^n in un punto di S_r^m avente coordinate puntualmente non maggiori a quelle di partenza. Chiameremo *leq*-funzioni questo tipo di funzioni e le indicheremo con f^{\leq} .

Definizione. $f : S_r^n \rightarrow S_r^m$ è una *leq*-funzione se vale:

$$(x_1, x_2, \dots, x_r) \xrightarrow{f} (y_1, y_2, \dots, y_r) \Rightarrow x_i \geq y_i, \forall i.$$

Le frecce nella figura 4 illustrano il comportamento delle *leq*-funzioni.

FIGURA 5. $r = 3$.

Abbiamo così stabilito una corrispondenza biunivoca tra le MV funzioni da α_r^n a β_r^m e le *leq*-funzioni da S_r^n a S_r^m . Vale allora:

$$\mathcal{F}_{n,m}^r = \#\{f : \alpha_r^n \rightarrow \beta_r^m\} = \#\{f^\leq : S_r^n \rightarrow S_r^m\}$$

Contare MV funzioni tra due MV set di tipo α_r^n corrisponde dunque a contare le *leq*-funzioni tra i punti di due iperpiani.

Per meglio capire il significato di questa corrispondenza, proviamo a riprendere le osservazioni fatte nel paragrafo 1. Cerchiamo le funzioni da S_r^n a S_s^m , per $r > s$ e $m > 0$. Esisterà in S_r^n un punto avente coordinate $(0, 0, \dots, n)$. I punti di S_s^m mancheranno sicuramente dell'ultima coordinata, essendo $r > s$, e non avranno tutte le altre coordinate nulle, perchè $m > 0$. Non esistono quindi *leq*-funzioni da S_r^n a S_s^m , non potendo esistere un corrispondente per il punto $(0, 0, \dots, n)$. Passiamo al caso $r < s$. I punti di S_r^n avranno coordinate $(x_1, \dots, x_r, 0, 0, \dots)$, quelli di S_s^m avranno coordinate $(y_1, \dots, y_i, \dots, y_s)$. Una *leq*-funzione potrà mappare punti di

S_r^n nei soli punti di S_s^m aventi $y_i = 0, \forall i > r$, ovvero nei punti di S_r^m . L'unico caso significativo di conteggio di *leq*-funzioni si ha quindi per $r = s$. Consideriamo infine le *leq*-funzioni da S_r^n a S_r^m , per $n < m$. In questo caso una *leq*-funzione dovrebbe far corrispondere ad un punto di un iperpiano un punto di un iperpiano superiore, ma questo, per la definizione di *leq*-funzione, non è possibile. Non esistono dunque *leq*-funzioni da S_r^n a S_r^m quando $n < m$.

Dalla definizione di *leq*-funzioni, possiamo giungere alla seguente formula per effettuare il loro conteggio:

$$\mathcal{F}_{n,m}^r = \prod_{x_1+x_2+\dots+x_r=n} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=m} \left(\prod_{i=1}^r [x_i \geq k_i] \right)$$

Il significato di questa formula è abbastanza semplice: per ogni punto di S_r^n , avente come coordinate (x_1, x_2, \dots, x_r) , si contano, per mezzo della sommatoria, i punti di S_r^m aventi coordinate ad una ad una non maggiori di quelle del punto di partenza. Questa relazione vale per ogni r , ma senza dubbio non è di facile computazione. Andiamo allora a cercare una formula migliore, iniziando dal caso $m = n - 1$: questo corrisponde, in termini geometrici, a contare le *leq*-funzioni che mappano i punti di un iperpiano nei punti dell'iperpiano immediatamente inferiore.

Consideriamo gli insiemi S_3^4, S_3^3 e le funzioni $f^{\leq} : S_3^4 \rightarrow S_3^3$. Gli elementi di S_3^4 saranno i punti (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 + x_2 + x_3 = 4$. Vogliamo ora partizionare questo insieme di punti in 3 blocchi: il primo conterrà tutti quei punti aventi una sola coordinata non nulla, il secondo conterrà i punti aventi due coordinate non nulle, il terzo tutti i punti aventi le tre coordinate non nulle. La scelta non è affatto casuale. Il primo blocco conterrà infatti tutti quei punti che potranno essere mappati, attraverso una *leq*-funzione, in un solo modo: decrementando di una unità l'unica coordinata diversa da zero. Il secondo blocco conterrà tutti quei punti che potranno essere mappati in due modi, il terzo tutti e solo i punti che potranno essere mappati in tre modi. Non ci resta ora che contare quanti sono i punti in ogni blocco. Pensiamo allora alle... palline nelle scatole. Le scatole saranno le coordinate di un punto: nel nostro caso abbiamo a disposizione 3 scatole ben distinte. Le palline saranno i valori da assegnare, complessivamente, alle coordinate: saranno dunque 4 e indistinguibili. Si osserva che gli assegnamenti possibili di n palline indistinguibili in r scatole distinguibili sono $\frac{\langle r \rangle_n}{n!}$, esattamente quanti i punti di S_r^n , e tanti quanti gli elementi di α_r^n . Andiamo a contare quanti punti appartengono al secondo blocco, quanti cioè hanno due coordinate non nulle. In quanti modi possiamo scegliere due scatole (il numero di coordinate non nulle) da un insieme di tre scatole? Lo si potrà fare in $\binom{3}{2}$ modi. Quanti assegnamenti suriettivi (le coordinate non possono essere nulle!) di 4 palline indistinguibili in 2 scatole ci sono? Ci saranno $\binom{4-1}{4-2}$ assegnamenti di questo tipo. In totale il numero di punti del secondo blocco sarà: $\binom{3}{2} \binom{4-1}{4-2} = 3 \cdot 3 = 9$. Procedendo nello stesso modo, otteniamo che il numero dei

punti del primo blocco sarà $\binom{3}{1}\binom{4-1}{4-1} = 3 \cdot 1 = 3$ e il numero di punti del terzo blocco sarà $\binom{3}{3}\binom{4-1}{4-3} = 1 \cdot 3 = 3$. Abbiamo allora:

$$\mathcal{F}_{4,3}^3 = 1^3 \cdot 2^9 \cdot 3^3 = 512 \cdot 27 = 13824 .$$

In generale, la formula che conta il numero di MV funzioni da α_r^n a β_r^{n-1} sarà:

$$\mathcal{F}_{n,n-1}^r = \prod_{i=1}^r i \binom{r}{i} \binom{n-1}{n-i} , \quad \forall n, r > 0 .$$

Consideriamo ora la tabella `MVPrimeSetFunctions[2,11]`. Possiamo rappresentarne come segue la sua parte significativa ($n \geq m$):

				1					
				1		1			
			1	2		1			
		1	4	4		1			
	1	8	12	8		1			
	1	16	36	36		16		1	
	1	32	108	144		108		32	1
1	64	324	576	576		324		64	1

Osserviamo la colonna centrale. Si ha che:

$$(1 + 1) \cdot 1 = 2;$$

$$(4 + 4) \cdot 1.5 = 12;$$

$$(36 + 36) \cdot 2 = 144;$$

$$(576 + 576) \cdot 2.5 = 2880.$$

Questi valori suggeriscono la seguente formula, per $n > 0$:

$$\mathcal{F}_{2n,n}^2 = 2\mathcal{F}_{2n-1,n-1}^2 \cdot \frac{n+1}{2} = (n+1)\mathcal{F}_{2n-1,n-1}^2$$

Ancora, osserviamo che tra gli elementi di questa colonna sussistono le relazioni:

$$1 \cdot (2)_2 = 1 \cdot 2 = 2,$$

$$2 \cdot (3)_2 = 2 \cdot 6 = 12,$$

$$12 \cdot (4)_2 = 12 \cdot 12 = 144,$$

$$144 \cdot (5)_2 = 144 \cdot 20 = 2880,$$

che sono descritte da:

$$\mathcal{F}_{2n,n}^2 = (n+1)_2 \mathcal{F}_{2(n-1),n-1}^2 , \quad \forall n > 0.$$

Dall'unione di questa formula con la precedente si ricava:

$$\mathcal{F}_{2n-1,n-1}^2 = n\mathcal{F}_{2n-2,n-1}^2 .$$

Torniamo ad osservare la tabella dei risultati, marcando in essa i valori significativi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{4} & \underline{4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 12 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 16 & \boxed{36} & \underline{36} & 16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 32 & 108 & \underline{144} & 108 & 32 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 64 & 324 & \boxed{576} & \underline{576} & 324 & 64 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 128 & 972 & 2304 & \underline{2880} & 2304 & 972 & 128 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 256 & 2916 & 9216 & \boxed{14400} & \underline{14400} & 9216 & 2916 & 256 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 512 & 8748 & 36864 & 72000 & \underline{86400} & 72000 & 36864 & 8748 & 512 & 1 & 0 \\ 1 & 1024 & 26244 & 147456 & 360000 & \boxed{518400} & \underline{518400} & 360000 & 26244 & 1024 & 10 & 1 \\ \times 1 & \times 2 & \times 3 & \times 4 & \times 5 & \times 6 & \times 7 & \times 8 & \times 9 & \times 10 & \times 11 & \times 12 \end{pmatrix}$$

Vediamo che in ogni colonna m , a partire da una certa profondità (per $n \geq 2m$), persiste un fattore moltiplicativo pari a $m+1$ tra un elemento e il suo precedente. Consideriamo le *leq*-funzioni tra punti di iperpiani, nel caso in cui $r = 2$. Chiameremo *passo* di una funzione il valore $p = n - m$. Manteniamo invariato il passo, ponendo $p = 2$. Si osserva (figura 4) che a partire da un certo n resteranno invariati il numero di punti del dominio aventi una sola possibile immagine (i 2 estremi). Lo stesso vale per il numero di punti aventi 2 possibili immagini, che saranno esclusivamente i 2 punti adiacenti agli estremi. Al crescere di n crescerà quindi solo il numero di punti aventi 3 possibili immagini, ovvero crescerà l'esponente di 3 (3 è il numero dei punti di S_2^2) in un'ipotetica formula, simile a quella per il calcolo di $\mathcal{F}_{n,n-1}^r$, che calcoli il numero di MV funzioni $\mathcal{F}_{n,n-2}^2$. In generale, questo spiega un rapporto pari a $|S_2^p| = \binom{2+p-1}{p} = \binom{p+1}{p} = p+1$ tra valori consecutivi della diagonale $n - m = p$. Per il teorema della simmetria questa diagonale coincide con la colonna $m = p$. Ecco spiegato il motivo dell'esistenza del fattore moltiplicativo nelle colonne. Possiamo allora scrivere la seguente formula:

$$\mathcal{F}_{n,m}^2 = (m+1)\mathcal{F}_{n-1,m}^2, \quad \forall n \geq 2m > 0.$$

Se $2m > n > m$, si ha che $2m > 2n - n$, quindi $n > 2n - 2m = 2(n - m)$. Allora la nostra formula ci permette di calcolare il valore di $\mathcal{F}_{n,n-m}^2$, ma, per il teorema della simmetria, questo valore è uguale a $\mathcal{F}_{n,m}^2$. Sappiamo dunque calcolare ogni valore di $\mathcal{F}_{n,m}^2$ (prescindendo dal concetto di MV set) attraverso la seguente espressione:

$$\mathcal{F}_{n,m}^2 = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m, \\ 1 & \text{se } m = 0 \vee n = m, \\ (m+1)\mathcal{F}_{n-1,m}^2 & \text{se } n \geq 2m > 0, \\ (n-m+1)\mathcal{F}_{n-1,n-m}^2 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo infine i valori della tabella racchiusi all'interno dei riquadri. Vale:

$$\mathcal{F}_{2n-1,n-1}^2 = (n!)^2, \quad \forall n > 0.$$

3.1. **Note.** Elenchiamo alcune ipotesi da prendere in considerazione in un prossimo lavoro.

- (1) Si vuole cercare una formula generale, che sia valida per calcolare $\mathcal{F}_{n,m}^r$ per ogni $n \geq m \geq 0$, $r > 0$. Indicativamente, potremmo aspettarci che sia una formula simile a quella vista per il calcolo di $\mathcal{F}_{n,n-1}^r$. Osserviamo l'indice della produttoria di quest'ultima formula. Nel caso studiato, l'indice variava da 1 a r , perchè le possibili immagini di un punto nell'iperpiano immediatamente inferiore erano, a seconda del punto di partenza, $1, 2, \dots, r$. Passiamo al caso generale. Osservando la figura 4 scopriamo che il numero massimo di corrispondenti di un punto attraverso una funzione di passo p coincide con il numero di punti a coordinate intere non negative dell'iperpiano $x_1 + x_2 + \dots + x_r = p$, ovvero coincide con $|S_r^p| = \frac{\binom{r}{p}}{p!} = \binom{r+p-1}{p}$. La formula cercata sarà quindi nella forma:

$$\mathcal{F}_{n,m}^r = \prod_{i=1}^{\binom{r+p-1}{p}} i^{\dots}, \quad \forall n \geq m \geq 0, r > 0, p = n - m.$$

... non resta ora che dividere i punti a seconda del numero di immagini in cui possono essere mappati da una *leq*-funzione, e contarli!

- (2) È possibile trovare una relazione, valida sui risultati ottenuti, nella forma:

$$C(n, k) = C(n-1, k-1) + L_{n,k} C(n-1, k) \quad ?$$

- (3) Annotiamo le rappresentazioni di α_2^n come funzioni simmetriche omogenee complete:

$$n = 0 \rightarrow \{2^0, 3^0\} \rightarrow 1$$

$$n = 1 \rightarrow \{2^1, 3^1\} \rightarrow x + y$$

$$n = 2 \rightarrow \{2^2, 2 \cdot 3, 3^2\} \rightarrow x^2 + xy + y^2$$

$$n = 3 \rightarrow \{2^3, 2^2 \cdot 3, 2 \cdot 3^2, 3^3\} \rightarrow x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$$

$$n = 4 \rightarrow \{2^4, 2^3 \cdot 3, 2^2 \cdot 3^2, 2 \cdot 3^3, 3^4\} \rightarrow x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

- (4) Diamo un'ulteriore descrizione di $\mathcal{F}_{n,m}^r$, in termini di palline nelle scatole: $\mathcal{F}_{n,m}^r = \#\{f : \alpha_r^n \rightarrow \beta_r^m\}$ conta in quanti modi, prese r scatole distinguibili contenenti complessivamente n palline indistinguibili, è possibile togliere $n - m$ palline dalle scatole, lasciandovi quindi m palline.

4. MV INIEZIONI

Non c'è molto da dire sulle MV iniezioni. Osservando le tabelle dei risultati si vede infatti che il numero di MV iniezioni deboli è nullo tranne nei casi in cui $r = 1$ ed $m \leq n$, oppure $r > 1$ ed $n = m$. Il primo caso è spiegato dal fatto che per $r = 1$ dominio e codominio sono formati da un solo elemento, quindi ogni funzione è una iniezione debole, il secondo dal fatto che per $m < n$ il codominio è più piccolo del dominio, quindi possono esistere iniezioni solo per $n = m$. Ovviamente, quando $n > m$, non esistono MV iniezioni, perchè non esistono MV funzioni.

Per quanto riguarda le MV funzioni fortemente iniettive, occorre osservare che nel caso $r = 1$ l'unica iniezione forte si ha per $n = m$, negli altri casi (quando $m < n$) l'unica iniezione debole non preserva la molteplicità, quindi non è forte.

5. MV SURIEZIONI

Limitiamo la nostra analisi alle MV suriezioni forti. Ricordiamo innanzitutto che se $f : \alpha \rightarrow \gamma$ è una MV funzione, diciamo che f è fortemente suriettiva sse f è suriettiva sugli insiemi supporto A e C di α e γ e, per ogni $c \in C$, vale

$$\gamma(c) = MCD \{ \alpha(a) \mid f(a) = c \}.$$

Nella visione geometrica, introdotta nel paragrafo 3, al concetto di massimo comun divisore corrisponderà quello di minimo tra le coordinate. Diremo cioè che una MV suriezione f è forte se preso un qualsiasi punto del codominio vale che ogni sua coordinata è il minimo tra le corrispondenti coordinate delle sue controimmagini. Per convincersi della corrispondenza tra MCD e minimo basta pensare al fatto che la coordinata non è altro che l'esponente di un numero primo. Sia p_i il primo in questione, allora $MCD(p_i^x, p_i^y) = p_i^{\min(x,y)}$.

L'utilizzo del *minimo* risulta più chiaro osservando la figura 6.

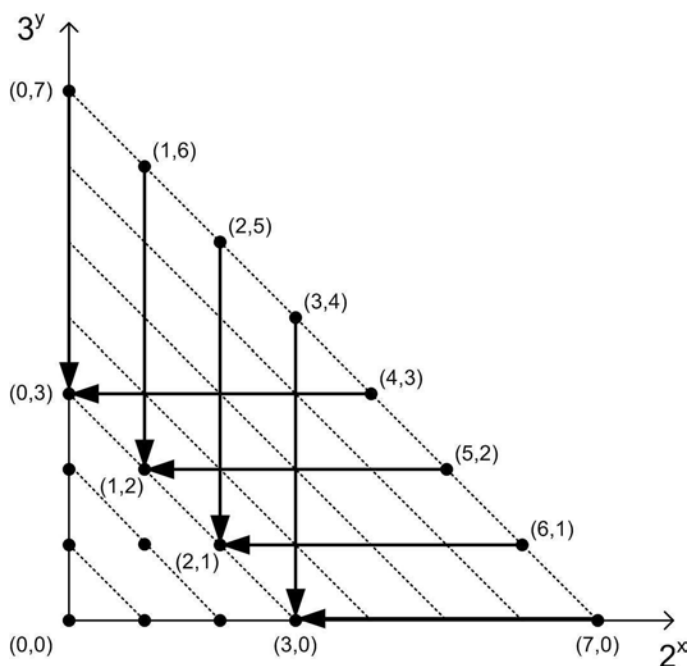


FIGURA 6. L'unica MV suriezione forte da S_2^7 a S_2^3 .

Dimostriamo la seguente:

Proposizione 5.1. *In una MV suriezione forte $f : \alpha_r^n \rightarrow \beta_r^m$, con $n > m$, ogni blocco contiene almeno 2 elementi.*

Dimostrazione. Occorre, in altre parole, dimostrare che in una suriezione forte ogni elemento del codominio ha sempre almeno 2 controimmagini. Va osservato che, nel caso non banale in cui $n < m$, è impossibile che tutte le coordinate di un punto di $S_r^n \cong \alpha_r^n$ coincidano con quelle di un punto di $S_r^m \cong \beta_r^m$. Affinché si abbia una suriezione forte le coordinate di un qualsiasi punto del codominio devono essere il minimo tra le rispettive coordinate delle controimmagini, risulta quindi immediato che, non essendo un solo elemento del dominio in grado di avere questa proprietà, devono esserci almeno due controimmagini. Ponendo $r = 2$ si osserva, in particolare, che, perché ci sia una suriezione forte, occorre che ogni punto del codominio sia raggiunto almeno da un cammino verticale (che quindi mantenga invariata la prima coordinata) e da un cammino orizzontale (che mantenga invariata la seconda coordinata). \square

Soffermiamoci sul caso $r = 2$, osservando la tabella riportata di seguito.

MVPrimeSetStrongSurFunctions[2, 7]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 16 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La diagonale principale ($n = m$) conta l'unica MV biiezione da α_r^n in β_r^n . Scendendo dalla diagonale principale si incontrano alcuni valori nulli, fino a quando inizia una sequenza di potenze. Per $n - m$ abbastanza piccolo non esistono quindi MV suriezioni forti. Non è difficile spiegarne il motivo. Ogni punto del codominio deve infatti avere almeno 2 controimmagini, una per il cammino verticale ed una per quello orizzontale. La cardinalità del dominio deve quindi essere almeno doppia rispetto a quella del codominio.

Proposizione 5.2. *Condizione necessaria per l'esistenza di MV suriezioni forti $f : \alpha_r^n \rightarrow \beta_r^m$, per $n > m$ e $\forall r$, è che:*

$$\binom{n+r-1}{n} \geq 2 \binom{m+r-1}{m}.$$

Dimostrazione. La proposizione è immediata conseguenza della 5.1. \square

Per $r = 2$, esistono MV suriezioni forti in ogni caso in cui la condizione della 5.2 risulti verificata. Indichiamo con $S_{n,m}^r$ il numero di MV suriezioni forti da α_r^n a β_r^m (e quindi da S_r^n a S_r^m). Vale allora:

Proposizione 5.3. $S_{n,m}^r > 0$ sse $\binom{n+r-1}{n} \geq 2 \binom{m+r-1}{m}$, $n > m$, $r = 2$.

Dimostrazione. Ci basta dimostrare che, se la condizione $\binom{n+r-1}{n} \geq 2\binom{m+r-1}{m}$ è verificata, allora vale $S_{n,m}^r > 0$. Per $r = 2$ si ha: $\binom{n+r-1}{n} = \binom{n+2-1}{n} = n + 1$. La condizione diventa quindi: $n + 1 \geq 2(m + 1)$, cioè $n \geq 2m + 1$.

I punti di S_r^m sono: $(0, m), (1, m - 1), (2, m - 2), \dots, (m, 0)$.

I punti di S_r^n sono: $(0, n), (1, n - 1), \dots, (m, n - m), \dots, (n - m, m), \dots, (n, 0)$.

Possiamo senz'altro scriverli in quest'ordine, perchè $n - m > m \geq 0$. Infatti, per ipotesi, $n \geq 2m + 1$, quindi $n - m \geq m + 1$. Proviamo a costruire una suriezione forte tra i due insiemi. Una delle controimmagini di $(0, m)$ dovrà essere, necessariamente, il punto $(0, n)$, in modo da rendere il *minimo* sulla prima coordinata delle controimmagini uguale a 0. Per lo stesso motivo un'altra controimmagine di $(0, m)$ dovrà essere, necessariamente, $(n - m, m)$. Analogamente, due controimmagini di $(1, m - 1)$ dovranno essere $(1, n - 1)$ e $(n - m + 1, m - 1)$... e così via. Restano ora da sistemare i punti di S_r^n non ancora mappati nel codominio. È facile rendersi conto che questi punti sono tutti e soli i punti della nostra lista ordinata compresi tra $(m, n - m)$ e $(n - m, m)$, ovvero quei punti (x, y) tali che $m < x, y < n - m$. Questi punti, avendo coordinate maggiori a quelle di ogni punto di S_r^m , potranno essere mappati da una MV funzione su tutto il codominio. Inoltre, comunque si scelga il corrispondente di questi punti, verrà mantenuta la suriezione forte. \square

Consideriamo una relazione come quella rappresentata in figura 7.

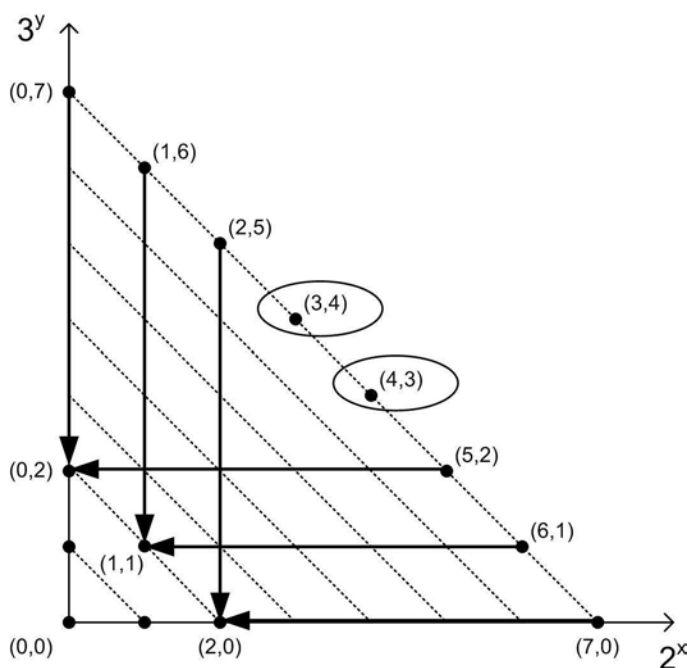


FIGURA 7. Punti liberi.

Questa relazione è una MV suriezione forte tra un sottoinsieme del dominio S_2^7 e l'intero codominio S_2^2 , che lascia *liberi* i punti centrali del dominio, quelli che possono essere mappati, attraverso una MV funzione, in ogni punto del codominio. Mappando dunque in qualsiasi modo questi punti sul codominio otteniamo una MV suriezione forte da S_2^7 in S_2^2 . Immediatamente osserviamo che il numero dei *punti liberi* è pari a $\binom{n+r-1}{n} - 2\binom{m+r-1}{m}$. Otteniamo allora la seguente formula, valida per il calcolo del numero di MV suriezioni forti nel caso $r = 2$, in presenza di *punti liberi*:

$$S_{n,m}^2 = \binom{m+r-1}{m}^{\binom{n+r-1}{n} - 2\binom{m+r-1}{m}}.$$

Abbiamo finora utilizzato il parametro r all'interno dei binomiali, per rendere più chiaro il fatto che stiamo ragionando sulle cardinalità di dominio e codominio. Stiamo però considerando solo il caso $r = 2$, possiamo quindi porre $\binom{m+r-1}{m} = m + 1$, $\binom{n+r-1}{n} = n + 1$. La condizione introdotta nella proposizione 5.2 diventa, come già osservato, $n \geq 2m + 1$, ovvero $n > 2m$. Raccogliendo quanto detto in questo paragrafo, arriviamo alla formula:

$$S_{n,m}^2 = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m, \\ (m+1)^{n-2m-1} & \text{se } n > 2m, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questa formula vale in generale per $r = 2$ e ben spiega il motivo per cui le colonne della tabella dei risultati rappresentano, da un certo punto in poi (quando $n > 2m$) sequenze di potenze del numero $m + 1$.

Ringraziamenti. L'autore desidera ringraziare i Proff. O. D'Antona, V. Marra, M. Torelli per i suggerimenti che hanno migliorato la prima versione del testo.

APPENDICE A. TABELLE DEI RISULTATI

Le tabelle che seguono mostrano i risultati ottenuti, con l'utilizzo di *Mathematica*, nel conteggio di MV funzioni generiche tra coppie di MV set di tipo α_r^n . Alcuni valori presenti nelle tabelle sono stati abbreviati (si troveranno ad esempio numeri come 943...) per permettere di visualizzare in una pagina tabelle di dimensione maggiore. Questi numeri sono comunque noti, e ricavabili tenendo presente il teorema 3.2. Per maggiori dettagli sulle funzioni utilizzate per la computazione e informazioni sul significato di queste tabelle si faccia riferimento al paragrafo 2.

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	8	12	8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	16	36	36	16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	32	108	144	108	32	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	64	324	576	576	324	64	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	128	972	2304	2880	2304	972	128	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	256	2916	9216	14400	14400	9216	2916	256	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	512	8748	36864	72000	86400	72000	36864	8748	512	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1024	26244	147456	360000	518400	518400	360000	147456	262..	1024	1	0	0	0	0	0	0
1	2048	78732	589824	1800000	3110400	3628800	3110400	1800000	589..	787..	2048	1	0	0	0	0	0
1	4096	236196	2359296	9000000	18662400	25401600	25401600	18662400	900..	235..	236..	4096	1	0	0	0	0
1	8192	708588	9437184	45000000	111974400	177811200	203212800	177811200	111..	450..	943..	708..	8192	1	0	0	0
1	16384	2125764	37748736	225000000	671846400	1244678400	1625702400	1625702400	124..	671..	225..	377..	212..	163..	1	0	0
1	32768	6377292	150994944	1125000000	4031078400	8712748800	13005619200	14631321600	130..	871..	403..	112..	150..	637..	327..	1	0

TABELLA 1. MVPrimeSetFunctions[2,16]

1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	8	1	0	0	0	0	0	0
1	192	192	1	0	0	0	0	0
1	13824	110592	13824	1	0	0	0	0
1	2985984	373248000	373248000	2985984	1	0	0	0
1	1934917632	7558272000000	62412703137792	7558272000000	193..	1	0	0
1	3761479876608	9183300480000000000	100211833364539244544	100211833364539244544	918..	376..	1	0
1	21936950640377856	6694626049920000000000000	1603690771027388446751588352	13631146639813244878848000000	160..	669..	219..	1

TABELLA 2. MVPrimeSetFunctions[3,8]

1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	64	1	0	0	0	0
1	331776	331776	1	0	0	0
1	557256278016	300578991243264	557256278016	1	0	0
1	1213025622610333925376	21407557176262656000000000000	21407557176262656000000000000	1213025622610333925376	1	0

TABELLA 3. MVPrimeSetFunctions[4,5]

1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	1024	1	0	0
1	61917364224	61917364224	1	0
1	226379693794030958489370624	555096452977570875755061495988224	226379693794030958489370624	1

TABELLA 4. MVPrimeSetFunctions[5,4]

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [Cod04] P. Codara, *Un ambiente di programmazione simbolica per lo studio di MV set*, Tesi di laurea, Università degli Studi di Milano, 2004.
- [D'A99] O. D'Antona, *Introduzione alla matematica discreta*, Apogeo, Milano, 1999.
- [DM] O. D'Antona e V. Marra, *The combinatorics of MV sets*, In pubblicazione.
- [Wol99] S. Wolfram, *The Mathematica[®] book*, 4th ed., Cambridge University Press, 1999.

(P. Codara) DIPARTIMENTO DI INFORMATICA E COMUNICAZIONE, VIA COMELICO 39/41, 20135 MILANO, ITALY

E-mail address: `codymail@inwind.it`